

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

СТРОИТЕЛЬНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра строительной механики

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине: «Теория упругости с основами теории пластичности и
ползучести»

на тему: «Плоская задача теории упругости»

Выполнил:

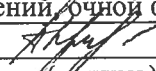
Павлова Татьяна Андреевна
(Ф.И.О)

Студент 3 курса, гр. СВ3-221

направление подготовки/ специальность

Строительство уникальных зданий и сооружений
направленность (профиль) / специализация

Строительство высотных и большепролетных
зданий и сооружений очной формы обучения


(подпись)

Руководитель проекта (работы):

Резунов Александр Васильевич,

(Ф.И.О., должность, кафедра)

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры строительной механики

Проект (работа) допущена(а) к защите


(подпись руководителя)

23.01.25

(дата)

Проект (работа) выполнена(а) и
защищена(а) с оценкой


(оценка)

23.01.25

(дата)

Воронеж 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Упражнение 1. Составление уравнений на поверхности пластинки.....	3
Упражнение 2. Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия.....	6
Упражнение 3. Решение плоской задачи теории упругости с помощью функции напряжений.....	11
Упражнение 4. Расчет балки-стенки.....	19

Упражнение №1. Составление уравнений на поверхности пластинки.

$$1 (0,0; 0,0)$$

$$2 (0,0; 3,5)$$

$$3 (4,0; 5,5)$$

$$4 (6,5; 1,0)$$

Общий вид уравнений на поверхности:

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{cases}$$

$$l = \cos \angle x, n$$

$$m = \cos \angle y, n$$

Найдем длины граней и тригонометрические функции углов α , β , γ :

$$L_{23} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ м}$$

$$L_{34} = \sqrt{4,5^2 + 2,5^2} = 5,15 \text{ м}$$

$$L_{14} = \sqrt{6,5^2 + 1^2} = 6,58 \text{ м}$$

$$\cos \alpha = 4,0/4,47 = 0,89$$

$$\sin \alpha = 2,0/4,47 = 0,45$$

$$\cos \beta = 4,5/5,15 = 0,87$$

$$\sin \beta = 2,5/5,15 = 0,49$$

$$\cos \gamma = 6,5/6,58 = 0,99$$

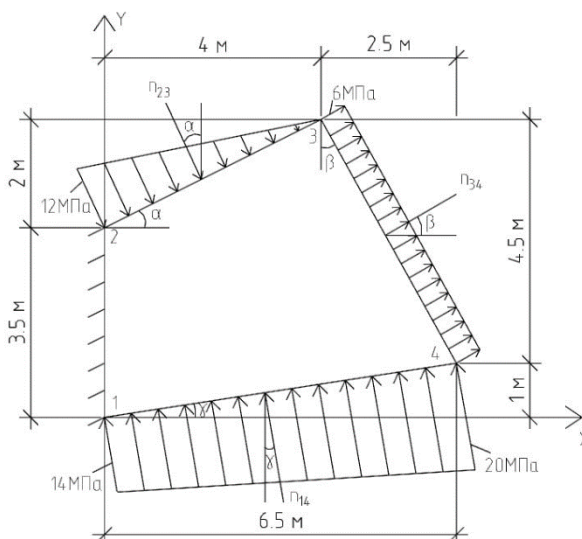
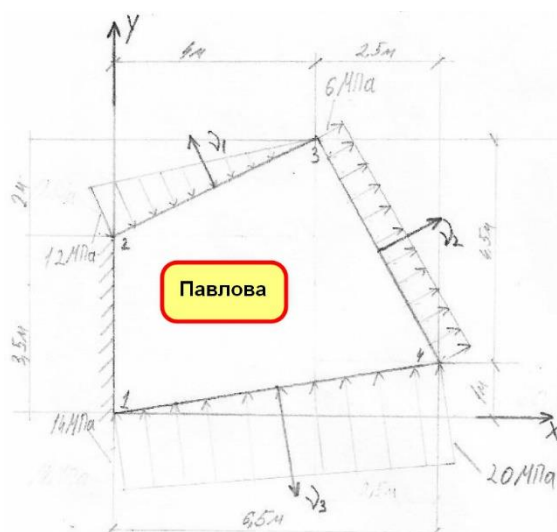
$$\sin \gamma = 1,0/6,58 = 0,15$$

Грань 1-2

$$x=0 \text{ м}$$

$$0 \text{ м} \leq y \leq 3,5 \text{ м}$$

Так как грань закреплена, то перемещения $u=0$ и $v=0$



Грань 2-3

$$0 \text{ м} \leq x \leq 4,0 \text{ м}$$

$$3,5 \text{ м} \leq y \leq 5,5 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

$$l = \cos \angle x, n_{23} = -\sin \alpha = -0,45$$

$$m = \cos \angle y, n_{23} = \cos \alpha = 0,89$$

Поверхностные силы представим в виде:

$$S(x) = d \cdot x + e$$

$$\begin{cases} 12 = 0 \cdot d + e \\ 0 = 4 \cdot d + e \end{cases} \quad \begin{cases} e = 12 \text{ МПа} \\ d = -3 \text{ МПа/м} \end{cases} \quad S(x) = (-3x + 12) \text{ МПа}$$

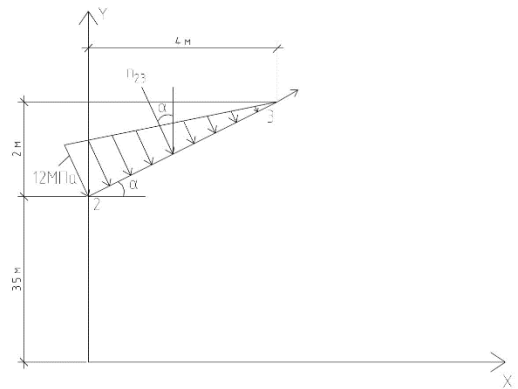
Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = 0,45 \cdot (-3x + 12) = (-1,35x + 5,4) \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = -0,89 \cdot (-3x + 12) = (2,67x - 10,68) \text{ МПа}$$

Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} -1,35x + 5,4 = -0,45\sigma_x + 0,89\tau_{yx} \\ 2,67x - 10,68 = -0,45\tau_{xy} + 0,89\sigma_y \end{cases}$$



Грань 3-4

$$4,0 \text{ м} \leq x \leq 6,5 \text{ м}$$

$$1,0 \text{ м} \leq y \leq 4,5 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

$$l = \cos \angle x, n_{34} = \cos \beta = 0,87$$

$$m = \cos \angle y, n_{34} = \sin \beta = 0,49$$

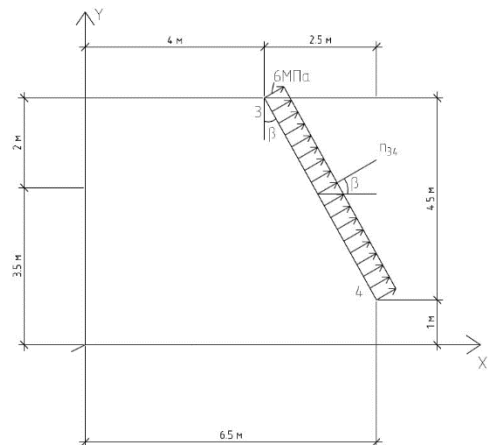
Поверхностные силы представим в виде:

$$S(x) = 6 \text{ МПа}$$

Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = 0,87 \cdot 6 = 5,22 \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = 0,49 \cdot 6 = 2,94 \text{ МПа}$$



Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} 5,22 = 0,87\sigma_x + 0,49\tau_{yx} \\ 2,94 = 0,87\tau_{xy} + 0,49\sigma_y \end{cases}$$

Грань 1-4

$$0 \text{ м} \leq x \leq 6,5 \text{ м}$$

$$0 \text{ м} \leq y \leq 1,0 \text{ м}$$

Направляющие косинусы:

$$l = \cos \angle x, n_{14} = \sin \gamma = 0,15$$

$$m = \cos \angle y, n_{14} = -\cos \gamma = -0,99$$

Поверхностные силы представим в виде:

$$S(x) = d \cdot x + e$$

$$\begin{cases} 14 = 0 \cdot d + e \\ 20 = 6,5 \cdot d + e \end{cases} \quad \begin{cases} e = 14 \text{ МПа} \\ d = 0,92 \text{ МПа/м} \end{cases} \quad S(x) = (0,92x + 14) \text{ МПа}$$

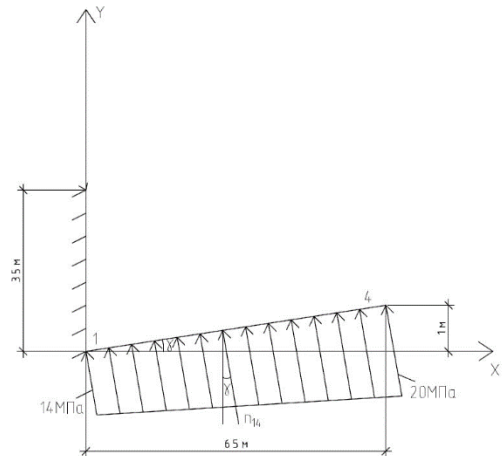
Тогда составляющие поверхностных сил будут равны:

$$\bar{X} = -0,15 \cdot (0,92x + 14) = (-0,14x - 2,1) \text{ МПа}$$

$$\bar{Y} = 0,99 \cdot (0,92x + 14) = (0,91x + 13,86) \text{ МПа}$$

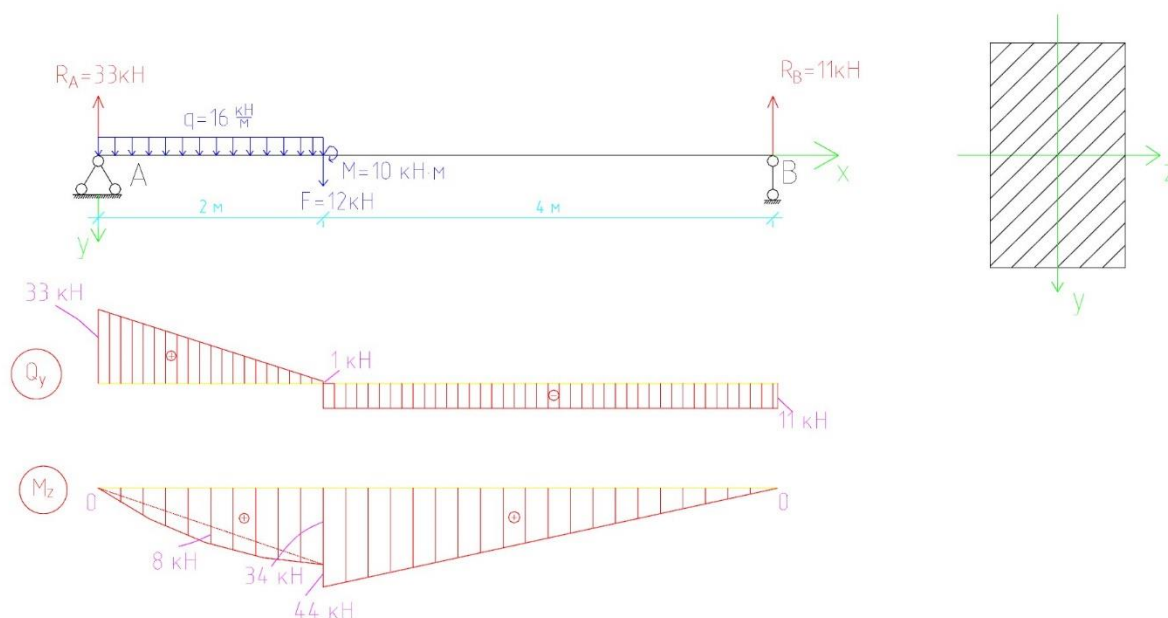
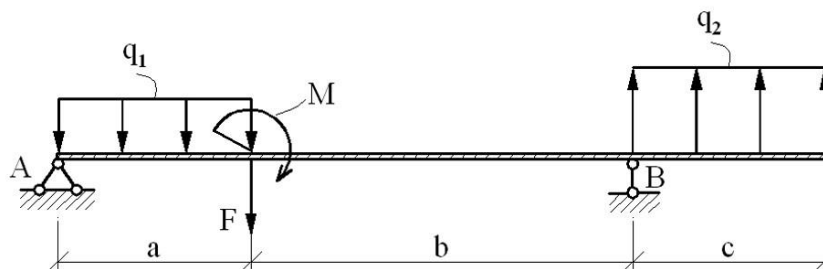
Уравнения на поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} -0,14x - 2,1 = 0,15\sigma_x - 0,99\tau_{yx} \\ 0,91x + 13,86 = 0,15\tau_{xy} - 0,99\sigma_y \end{cases}$$



Упражнение №2. Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия.

УПР №2 “Проверка выполнения дифференциальных уравнений равновесия”									
Ф.И.О.: Павлова Татьяна									
a, м	b, м	c, м	Нормативные нагрузки	M _н , кНм	F _н , кН	q _{1н} , кН/м	q _{2н} , кН/м	Коэффициент надежности по нагрузке, γ _f	
2	4	0		10	12	16	0	1.0	



1. Определение опорных реакций.

$$\sum M_A = 0; \quad 2 \cdot 12 + 10 + 16 \cdot 2 \cdot 1 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 11 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 6 + 10 - 16 \cdot 2 \cdot 5 - 12 \cdot 4 = 0; \quad R_A = 33 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0; \quad -11 + 16 \cdot 2 + 12 - 33 = 0; \quad 0 \equiv 0$$

2. Дифференциальные уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

X, Y - интенсивности объемных сил. В нашем случае X=Y=0.

3. Участок 1 ($0 \leq x_1 \leq 2$) м.

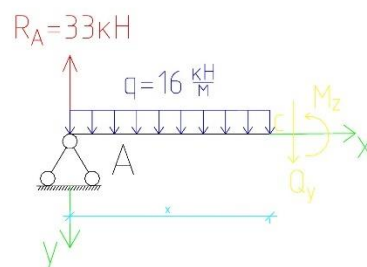
3.1 Найдем напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):

$$\Sigma M_c = 0; -33x + 16 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_z = 0;$$

$$M_z = (33x - 8x^2) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\Sigma Y = 0; Q_y - 33 + 16x = 0;$$

$$Q_y = (33 - 16x) \text{ кН}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y = (33x - 8x^2) \cdot \frac{y}{J_z} \\ \tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\omega}}{J_z \cdot b} = \frac{(33 - 16x)}{J_z \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{33 - 16x}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ \sigma_y = 0 \end{array} \right.$$

$$S_z^{\omega} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot 0.5 \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); J_z = \frac{bh^3}{12}$$

3.2 Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = (33 - 16x) \cdot \frac{y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -y \cdot \frac{(33 - 16x)}{J_z};$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right); \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (33 - 16x) \cdot \frac{y}{J_z} - y \cdot \frac{(33 - 16x)}{J_z} = 0; \text{ - выполняется.} \\ -\frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + 0 \neq 0 \text{ - не выполняется.} \end{array} \right.$$

3.3 Корректировка решения.

Пусть $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \neq 0$, тогда:

$$-\frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \Rightarrow$$

$$\sigma_y = \int \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) + f(x)$$

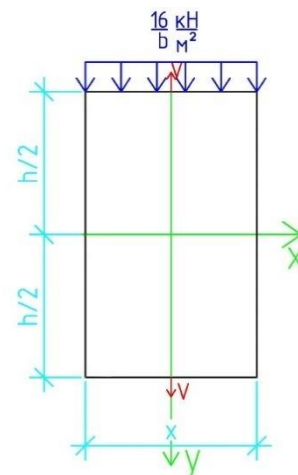
Произвольную функцию $f(x)$ найдем из уравнений на поверхности:

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m \\ \bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m \end{cases}$$

Верхняя грань, $y = -\frac{h}{2} \Rightarrow l = 0; m = -1;$

$$\bar{X} = 0; \bar{Y} = \frac{16}{b};$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \sigma_x - 1 \cdot \tau_{yx} \\ \frac{16}{b} = 0 \cdot \tau_{xy} - 1 \cdot \sigma_y \end{cases}; \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \sigma_y = -\frac{16}{b} \end{cases}$$



Нижняя грань, $y = \frac{h}{2} \Rightarrow l = 0; m = 1; \bar{X} = 0; \bar{Y} = 0;$

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \sigma_x + 1 \cdot \tau_{yx} \\ 0 = 0 \cdot \tau_{xy} + 1 \cdot \sigma_y \end{cases}; \quad \begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

Из условий нижней грани:

$$\tau_{xy} \left(y = \frac{h}{2} \right) = \frac{(33 - 16x)}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) = 0 - \text{выполняется}$$

$$\sigma_y \left(y = \frac{h}{2} \right) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{2h^3}{3J_z}$$

$$\text{Из условий на верхней грани: } \sigma_y = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot y^3 \right) - \frac{2h^3}{3J_z}$$

$$\tau_{xy} \left(y = -\frac{h}{2} \right) = \frac{(33-16x)}{2J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - \left(-\frac{h}{2} \right)^2 \right) = 0 - \text{выполняется};$$

$$\sigma_y \left(y = -\frac{h}{2} \right) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right) - \frac{2h^3}{3J_z} = -\frac{4h^3}{3J_z} = -\frac{16}{b} -$$

выполняется для прямоугольного сечения.

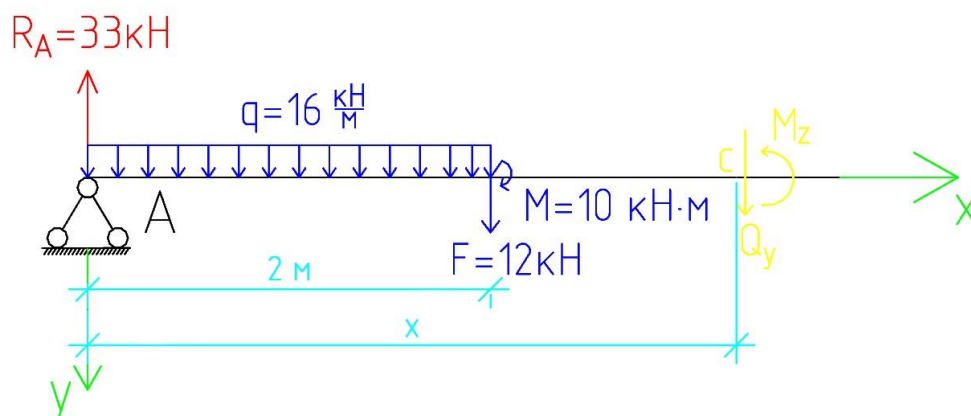
4. Участок 2 ($2 \text{ м} \leq x \leq 6 \text{ м}$).

4.1 Найдем напряжения по формулам из сопротивления материалов и проверим выполнение уравнений (1):

$$\Sigma M_c = 0; -33x + 16 \cdot 2 \cdot (x - 1) - 10 + 12 \cdot (x - 2) + M_z = 0;$$

$$M_z = (66 - 11x) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\Sigma Y = 0; Q_y - 33 + 16 \cdot 2 + 12 = 0; Q_y = -11 \text{ кН}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y = \frac{(66 - 11x) \cdot y}{J_z} \\ \tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot S_z^{\omega}}{J_z \cdot b} = -\frac{11}{J_z \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = -\frac{5.5}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \\ \sigma_y = 0 \end{array} \right.$$

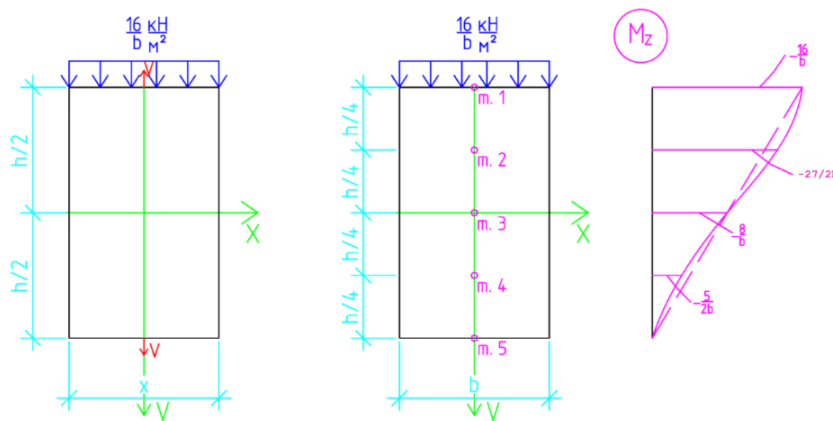
4.2 Проверим, удовлетворяют ли найденные напряжения дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -11 \cdot \frac{y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{11 \cdot y}{J_z}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -11 \cdot \frac{y}{J_z} + \frac{11y}{J_z} \equiv 0 - \text{выполняется} \\ 0 + 0 \equiv 0 - \text{выполняется} \end{array} \right.$$

5. Построение эпюр внутренних усилий. (см. стр.1)

6. Построение эпюры σ_y



$$\text{т.1: } \sigma_y \left(y = -\frac{h}{2} \right) = -\frac{16}{b};$$

$$\text{т.2: } \sigma_y \left(y = -\frac{h}{4} \right) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \left(-\frac{h}{4} \right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{h}{4} \right)^3 \right) - \frac{2h^3}{3J_z} = -\frac{27}{2b};$$

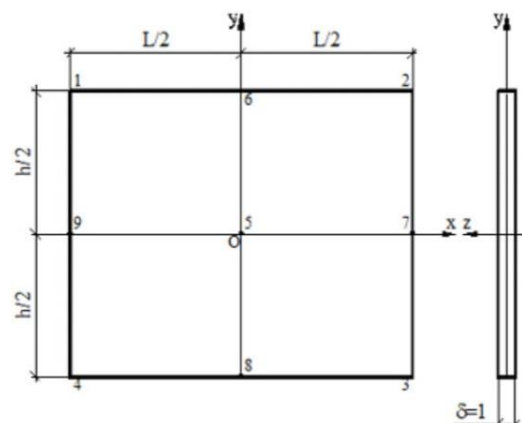
$$\text{т.3: } \sigma_y(y = 0) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 \right) - \frac{2h^3}{3J_z} = -\frac{8}{b};$$

$$\text{т.4: } \sigma_y \left(y = \frac{h}{4} \right) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{4} \right)^3 \right) - \frac{2h^3}{3J_z} = -\frac{5}{2b};$$

$$\text{т.5: } \sigma_y \left(y = \frac{h}{2} \right) = \frac{8}{J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) - \frac{2h^3}{3J_z} = 0.$$

Вывод: напряжения в балке, найденные методами сопротивления материалов, удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия только на участках, где не приложены распределенные нагрузки.

Упражнение №3. Решение плоской задачи теории упругости с помощью функции напряжений.



Павлова

Дано.

$$L := 0.8 \text{ м,}$$

$$h := 0.9 \text{ м,}$$

$$\nu := 0.24$$

$$\varphi := -23 \cdot x \cdot y^3$$

$$\delta := 1$$

$$x_a := x_8$$

$$y_a := y_8$$

$$x_b := x_8$$

$$y_b := y_8$$

$$x_c := x_1$$

$$y_c := y_1$$

$$z(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} u(x, y)$$

$$u_a = 0$$

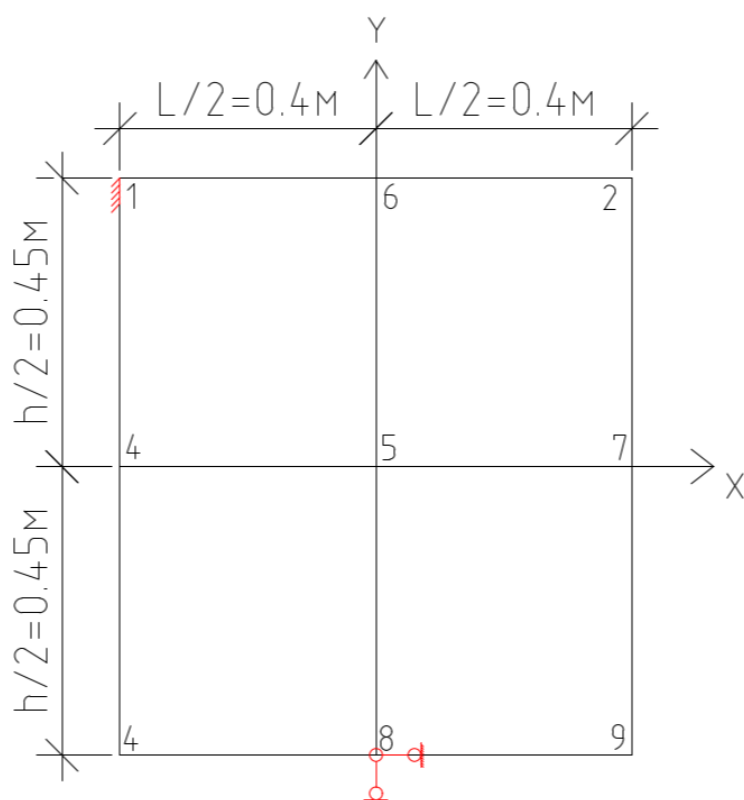
$$v_b = 0$$

$$z_c = 0$$

Вычислить перемещения точки с координатами (x_d, y_d)

$$x_d := x_4$$

$$y_d := y_4$$



1. Проверим выполнение уравнений совместности деформаций.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1); \quad \varphi = -23xy^3;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -23y^3; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -69xy^2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -138xy; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = -138x; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -69y^2; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0;$$

Подставляя в уравнение совместности (1), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно.

Найдем напряжения.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -138xy; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 69y^2;$$

2. Вычисление поверхностных сил.

Грань 1-2.

Интервал изменения координат: $-0,4\text{м} \leq x \leq 0,4\text{м}$; $y=0,45\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 90^\circ = 0$; $m = \cos 0^\circ = 1$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = -138xy \cdot 0 + 69y^2 \cdot 1 = 69y^2 = 69 \cdot 0,45^2 = 13,97 \text{ Мпа};$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = 69y^2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{1-2}^x = \int_{-0,4}^{0,4} \bar{X} dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} 13,97 dx \delta = 13,97 \delta \cdot y|_{-0,4}^{0,4} = 11,18 \delta;$$

$$R_{1-2}^y = \int_{-0,4}^{0,4} \bar{Y} dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} 0 dx \delta = 0;$$

$$M_{1-2} = \int_{-0,4}^{0,4} x(-\bar{Y}) dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} 0 x dx \delta = 0;$$

Грань 2-3.

Интервал изменения координат: $-0,45\text{м} \leq y \leq 0,45\text{м}$; $x=0,4\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 0^\circ = 1$; $m = \cos 90^\circ = 0$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = -138xy \cdot 1 + 69y^2 \cdot 0 = -138xy = -55,2y;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = 69y^2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 69y^2;$$

Функция $\bar{X}$ (y) линейная, и для построения эпюры достаточно найти:

$$\bar{X}(-0,45) = 24,84 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,45) = -24,84 \text{ МПа};$$

Зависимость $\bar{Y}$ (y) нелинейная, поэтому вычисляем ее через $0,25h=0,225\text{м}$

$$\bar{Y}(-0,45) = 13,97 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(-0,225) = 3,49 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0) = 0 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,225) = 3,49 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,45) = 13,97 \text{ МПа};$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{2-3}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dy \delta = -55,2\delta \int_{-0,45}^{0,45} y dy = -55,2\delta \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-0,45}^{0,45} = 0;$$

$$R_{2-3}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dy \delta = 69\delta \int_{-0,45}^{0,45} y^2 dy = 69\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,45}^{0,45} = 4,19\delta;$$

$$M_{2-3} = \int_{-0,45}^{0,45} y \bar{X} dy \delta = -55,2\delta \int_{-0,45}^{0,45} y^2 dy = -55,2\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,45}^{0,45} = -3,35\delta;$$

Грань 3-4.

Интервал изменения координат: $-0,4\text{м} \leq x \leq 0,4\text{м}$; $y=-0,45\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 270^\circ = 0$; $m = \cos 180^\circ = -1$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = -138xy \cdot 0 + 69y^2 \cdot (-1) = -69y^2 = -69 \cdot 0,45^2 = -13,97 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = 69y^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0;$$

$$R_{3-4}^x = \int_{-0,4}^{0,4} \bar{X} dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} -13,97 dx \delta = -13,97\delta \cdot y \Big|_{-0,4}^{0,4} = -11,18\delta;$$

$$R_{3-4}^y = \int_{-0,4}^{0,4} \bar{Y} dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} 0 dx \delta = 0;$$

$$M_{3-4} = \int_{-0,4}^{0,4} x(-\bar{Y}) dx \delta = \int_{-0,4}^{0,4} 0 x dx \delta = 0;$$

Грань 4-1.

Интервал изменения координат: $-0,45\text{м} \leq y \leq 0,45\text{м}$; $x=-0,4\text{м}$;

Направляющие косинусы: $l = \cos 180^\circ = -1$; $m = \cos 270^\circ = 0$;

Интенсивность поверхностных сил:

$$\bar{X} = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m = -138xy \cdot (-1) + 69y^2 \cdot 0 = 138xy = -55,2y;$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m = 69y^2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -69y^2;$$

Функция $\bar{X}$ (y) линейная, и для построения эпюры достаточно найти:

$$\bar{X}(-0,45) = 24,84 \text{ МПа};$$

$$\bar{X}(0,45) = -24,84 \text{ МПа};$$

Зависимость $\bar{Y}$ (y) нелинейная, поэтому вычисляем ее через

$$0,25h=0,225\text{м}$$

$$\bar{Y}(-0,45) = -13,97 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(-0,225) = -3,49 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0) = 0 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,225) = -3,49 \text{ МПа};$$

$$\bar{Y}(0,45) = -13,97 \text{ МПа};$$

Составляющие равнодействующей и момент относительно центра тяжести грани поверхностных сил будут равны:

$$R_{4-1}^x = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{X} dy \delta = -55,2\delta \int_{-0,45}^{0,45} y dy = -55,2\delta \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{-0,45}^{0,45} = 0;$$

$$R_{4-1}^y = \int_{-0,45}^{0,45} \bar{Y} dy \delta = -69\delta \int_{-0,45}^{0,45} y^2 dy = -69\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,45}^{0,45} = -4,19\delta;$$

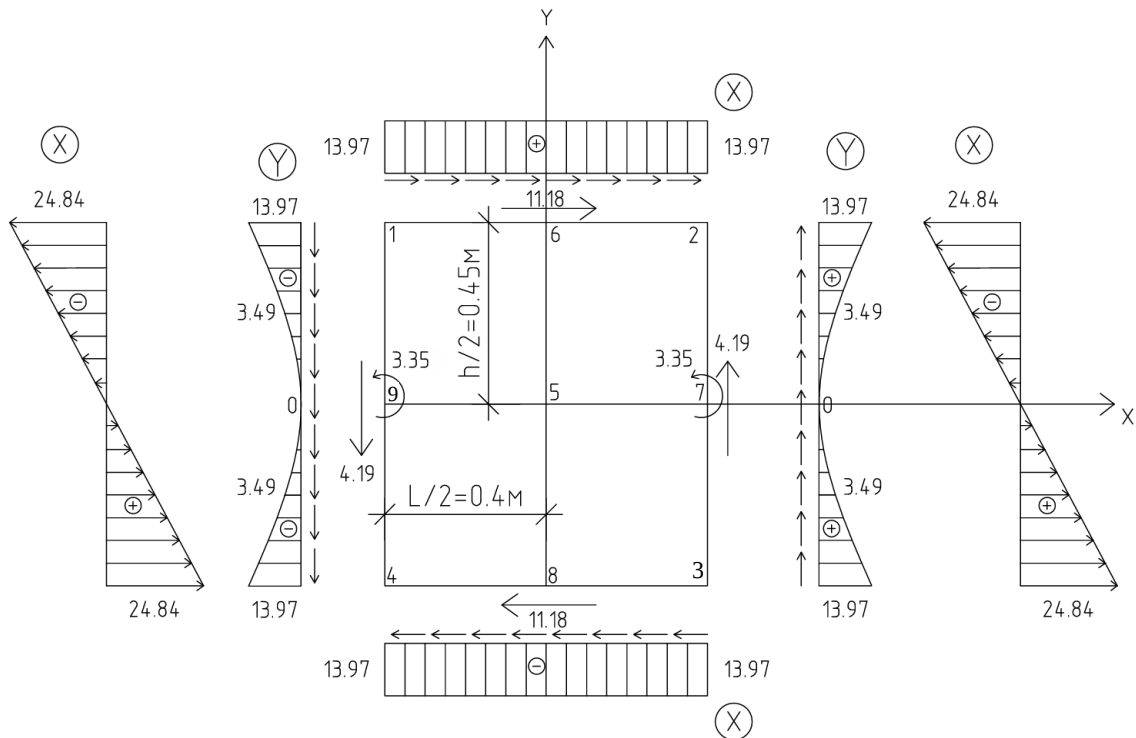
$$M_{4-1} = \int_{-0,45}^{0,45} y \bar{X} dy \delta = -55,2\delta \int_{-0,45}^{0,45} y^2 dy = -55,2\delta \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-0,45}^{0,45} = -3,35\delta;$$

Проверка равновесия пластины в целом:

$$\Sigma \bar{X} = R_{1-2}^x + R_{2-3}^x + R_{3-4}^x + R_{4-1}^x = 11,18\delta + 0 + (-11,18\delta) + 0 \equiv 0;$$

$$\Sigma \bar{Y} = R_{1-2}^y + R_{2-3}^y + R_{3-4}^y + R_{4-1}^y = 0 + 4,19\delta + 0 + (-4,19\delta) \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} \Sigma m_s = M_{1-2} + R_{1-2}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{2-3} - R_{2-3}^y \cdot \frac{L}{2} + M_{3-4} + R_{3-4}^x \cdot \frac{h}{2} + M_{4-1} - R_{4-1}^y \cdot \frac{L}{2} = \\ 0 + 11,18\delta \cdot 0,45 - 3,35\delta - 4,19\delta \cdot 0,4 + 0 + 11,18\delta \cdot 0,45 - 3,35\delta - 4,19\delta \cdot 0,4 \equiv 0 \end{aligned}$$



3. Перемещение пластины.

Подставим напряжения в выражения для закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y)}{E} = \frac{-138xy - 0,24 \cdot 0}{E} = -\frac{138xy}{E};$$

$$\varepsilon_y = \frac{(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x)}{E} = \frac{0 - 0,24 \cdot (-138xy)}{E} = \frac{33,12xy}{E};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \tau_{xy}}{E} = \frac{2,48\tau_{xy}}{E} = \frac{2,48 \cdot 69y^2}{E} = \frac{171,12y^2}{E};$$

Найденные деформации подставим в выражение Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{138xy}{E}; U = -\frac{138x^2y}{2E} + f(y) = -\frac{69x^2y}{E} + f(y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{33,12xy}{E}; V = \frac{33,12xy^2}{2E} + g(x) = \frac{16,56xy^2}{E} + g(x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{171,12y^2}{E};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{69x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy}; \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{16,56y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx};$$

$$-\frac{69x^2}{E} + \frac{df(y)}{dy} + \frac{16,56y^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{171,12y^2}{E};$$

$$-\frac{69x^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = \frac{154,56y^2}{E} - \frac{df(y)}{dy};$$

$$-\frac{69x^2}{E} + \frac{dg(x)}{dx} = a; \frac{154,56y^2}{E} - \frac{df(y)}{dy} = a;$$

$$g(x) = \frac{69x^3}{3E} + ax + b = \frac{23x^3}{E} + ax + b;$$

$$f(y) = \frac{154,56y^3}{3E} - ay + c = \frac{51,52y^3}{E} - ay + c;$$

$$V = \frac{16,56xy^2}{E} + \frac{23x^3}{E} + ax + b;$$

$$U = -\frac{69x^2y}{E} + \frac{51,52y^3}{E} - ay + c;$$

Постоянные а, b, с определим из заданных условий:

$$1) x=0\text{м}; y=-0,45\text{м}; U=0;$$

$$0 = -\frac{69 \cdot 0^2 \cdot (-0,45)}{E} + \frac{51,52 \cdot (-0,45)^3}{E} - a \cdot (-0,45) + c = \frac{-4,695}{E} + 0,45 \cdot a + c$$

$$2) x=0\text{м}; y=-0,45\text{м}; V=0;$$

$$0 = \frac{16,56 \cdot 0 \cdot (-0,45)^2}{E} + \frac{23 \cdot 0^3}{E} + a \cdot 0 + b = b;$$

Найдем b:

$$b = 0;$$

$$\text{Для т.1 } x=-0,4\text{м}; y=0,45\text{м}; \frac{\partial U}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{69x^2}{E} + \frac{154,56y^2}{E} - a;$$

$$0 = -\frac{69 \cdot 0,4^2}{E} + \frac{154,56 \cdot (-0,45)^2}{E} - a;$$

Найдем а:

$$a = \frac{20,258}{E}$$

Найдем с:

$$c = \frac{4,695}{E} - 0,45 \cdot \frac{20,258}{E} = -\frac{4,421}{E};$$

Подставим значения производных постоянных:

$$V = \frac{16,56xy^2}{E} + \frac{23x^3}{E} + \frac{20,258}{E} \cdot x;$$

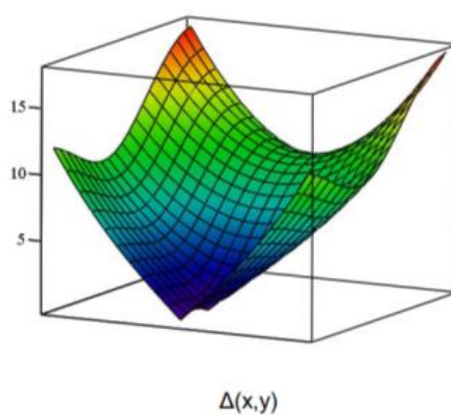
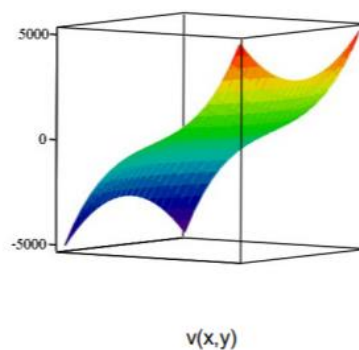
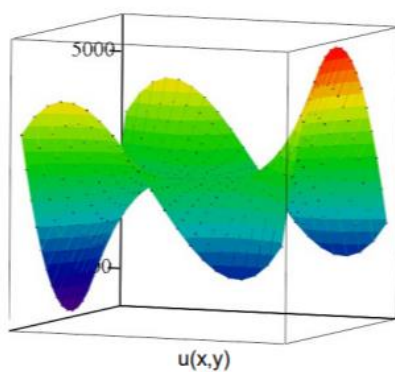
$$U = -\frac{69x^2y}{E} + \frac{51,52y^3}{E} - \frac{20,258}{E} \cdot y - \frac{4,421}{E};$$

Для точки т.4 с координатами x=-0,4м; y=-0,45м;

$$V = \frac{16,56 \cdot (-0,4) \cdot (-0,45)^2}{E} + \frac{23 \cdot (-0,4)^3}{E} + \frac{20,258}{E} \cdot (-0,4) = -\frac{10,917}{E};$$

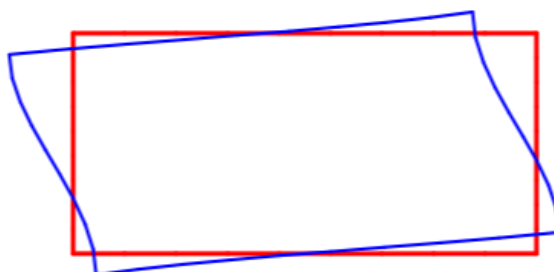
$$U = -\frac{69 \cdot (-0,4)^2 \cdot (-0,45)}{E} + \frac{51,52 \cdot (-0,45)^3}{E} - \frac{20,258}{E} \cdot (-0,45) - \frac{4,421}{E} = \frac{4,968}{E}$$

Построим графики функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ и $\Delta(x,y)$ при $E=1$

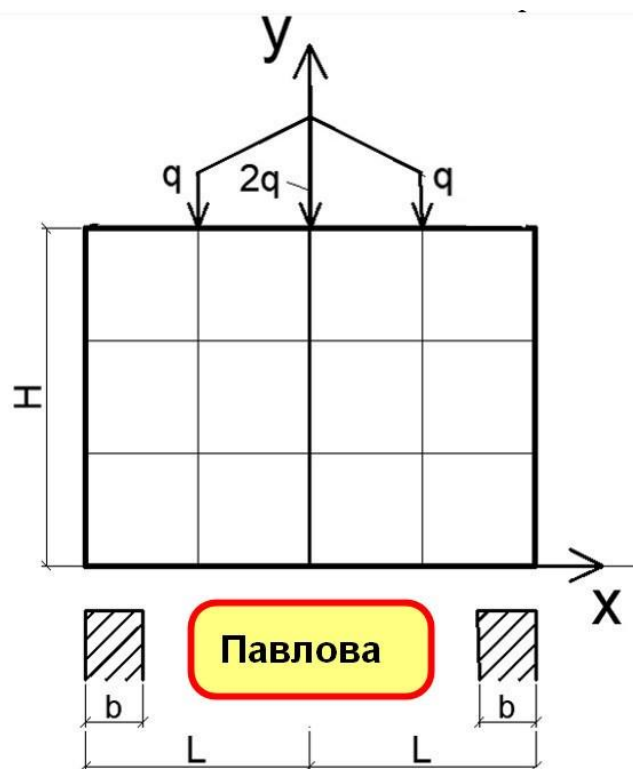


Контур пластины в исходном и деформированном виде.
При необходимости измените масштаб деформаций m и нажмите клавишу F9.

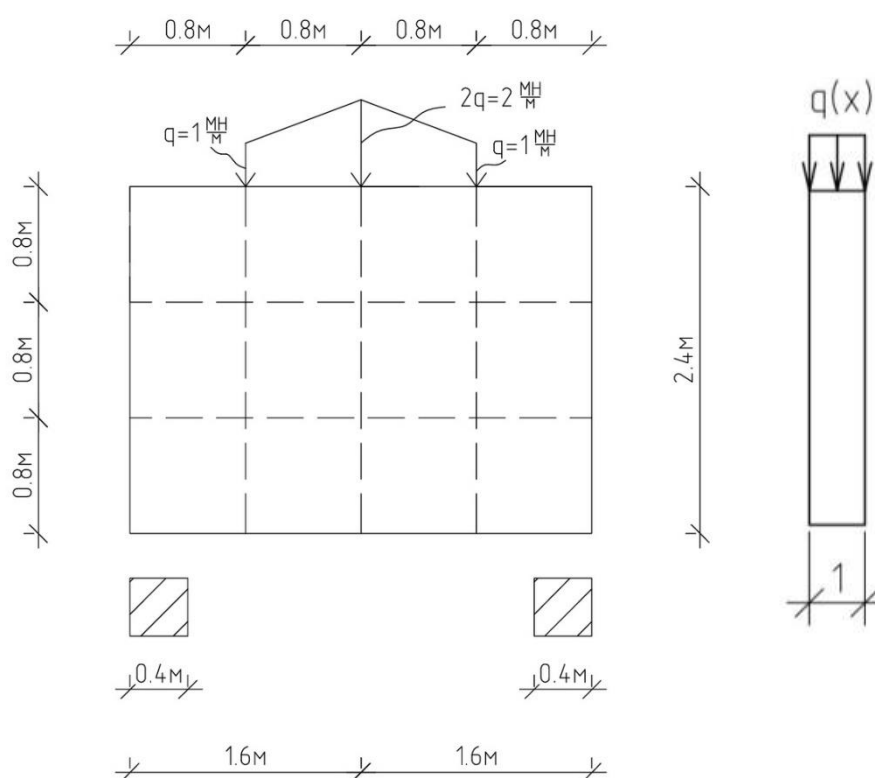
$$m = 0.008$$



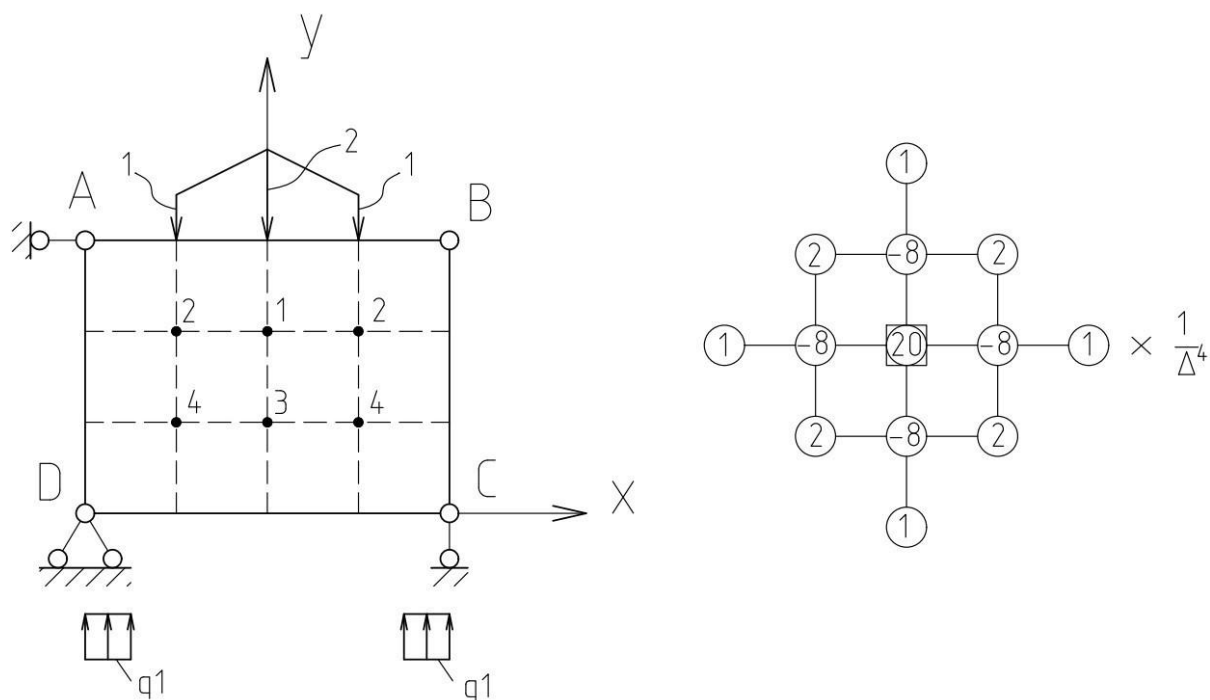
Упражнение №4. Расчёт балки-стенки.



$$L=2\Delta, \quad H=3\Delta, \quad b=\Delta/2, \quad \Delta=0.8\text{м}, \quad q=1\text{МН/м}$$



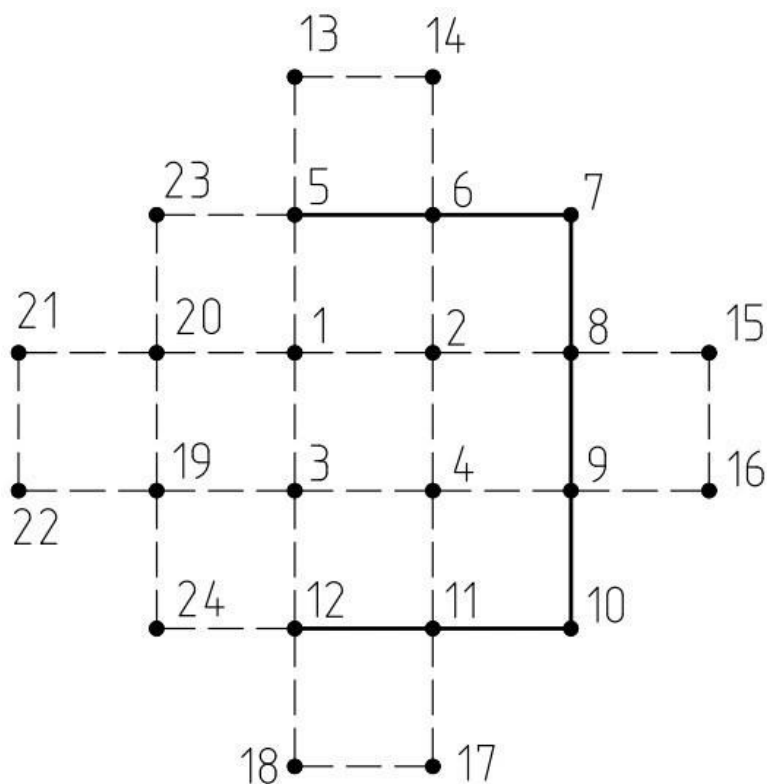
Изм.	Лист	№ докум	Подпись	Дата



1. Бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

$$20 \cdot \varphi_{ij} - 8(\varphi_{i-1j} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij-1} + \varphi_{ij+1}) + 2(\varphi_{i-1j-1} + \varphi_{i+1j-1} + \varphi_{i-1j+1} + \varphi_{i+1j+1}) + \varphi_{i-2j} + \varphi_{i+2j} + \varphi_{ij-2} + \varphi_{ij+2} = 0$$

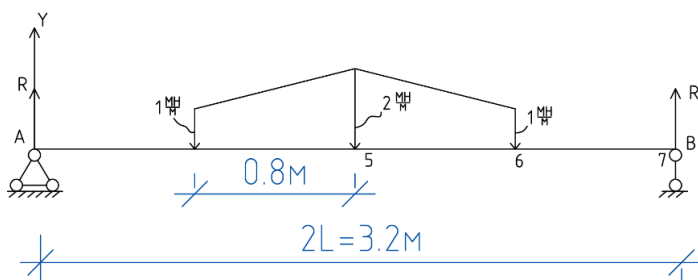


$$\begin{cases} 20\varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_{20} + \varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_{23} + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_{19}) + \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{21} + \varphi_8 = 0; \\ 20\varphi_2 - 8 \cdot (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_3) + \varphi_{11} + \varphi_{14} + \varphi_{20} + \varphi_{15} = 0; \\ 20\varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_{12} + \varphi_{19}) + 2 \cdot (\varphi_2 + \varphi_{11} + \varphi_{24} + \varphi_{20}) + \varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_{18} + \varphi_{22} = 0; \\ 20\varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_9 + \varphi_{11} + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \varphi_6 + \varphi_{16} + \varphi_{17} + \varphi_{19} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

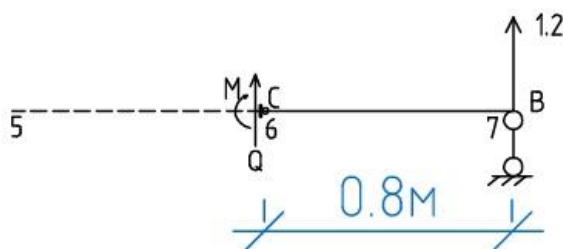
Исключим углы на контуре и законтурные узлы.

2. Построим эпюры М и N в стержнях соответствующей рамы.

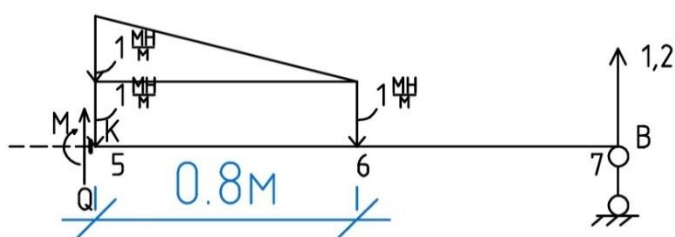
Стержень АВ



$$\begin{aligned} \sum y &= 0 \\ 2R - (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta &= 0 \\ R &= \frac{3}{2} \cdot \Delta = \frac{3}{2} \cdot 0,8 = 1,2 \text{ МН} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum m_c &= 0 \\ M - 1,2 \cdot 0,8 &= 0 \\ M_6 &= 0,96 \text{ МН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$



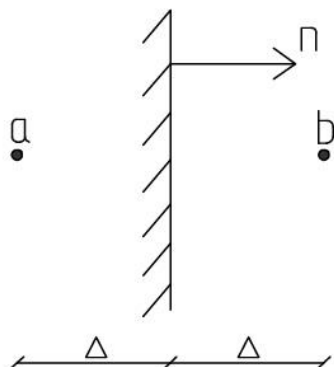
$$\begin{aligned} \sum m_k &= 0 \\ M - 1,2 \cdot 1,6 + 1 \cdot 0,8 \cdot \frac{0,8}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,8 &= 0 \\ M_5 &= 1,493 \text{ МН} \cdot \text{м} \\ M_7 &= 0 \text{ МН} \cdot \text{м} \\ N_5 &= N_6 = N_7 = 0 \end{aligned}$$

На контуре $\varphi = M, \frac{\partial \varphi}{\partial n} = N$

$$\varphi_5 = M_5 = 1,493$$

$$\varphi_6 = M_6 = 0,96$$

$$\varphi_7 = M_7 = 0$$



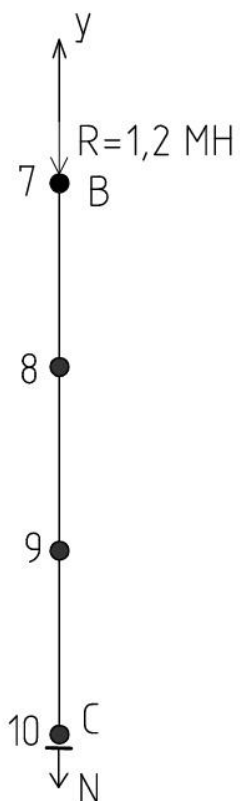
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2\Delta} = N$$

$$\varphi_b = \varphi_a + 2\Delta N$$

$$\text{т.5 } \varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot 0 \quad \varphi_{13} = \varphi_1$$

$$\text{т.6 } \varphi_{14} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot 0 \quad \varphi_{14} = \varphi_2$$

Стержень ВС



$$\sum y = 0$$

$$-R - N = 0$$

$$N = -R = -1,2 \text{ МН}$$

$$N_8 = N_9 = -1,2 \text{ МН}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{15} &= \varphi_2 + 2\Delta \cdot N_8 = \varphi_2 + 2 \cdot 0,8 \cdot (-1,2) \\ &= \varphi_2 - 1,92 \end{aligned}$$

$$\varphi_{16} = \varphi_4 - 1,92$$

$$M_8 = M_9 = 0$$

$$\varphi_8 = \varphi_9 = 0$$

Стержень CD

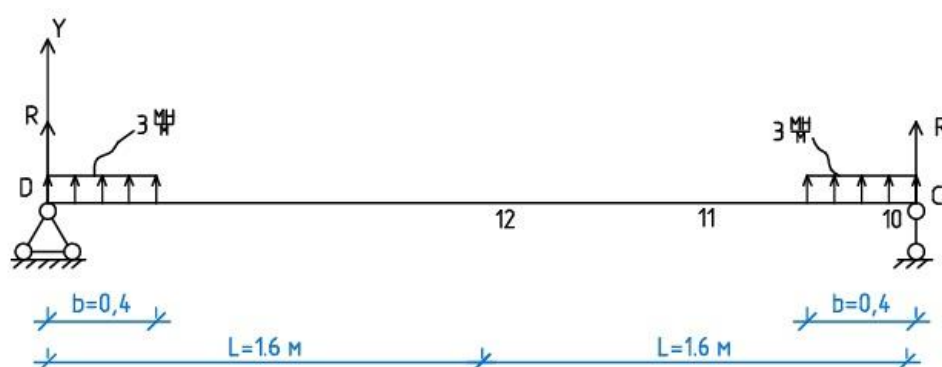
Найдем q_1 из уравнения балки-стенки:

$$\sum y = 0$$

$$2 \cdot q_1 \cdot b - (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\Delta = 0$$

$$q_1 \cdot b = q_1 \cdot \frac{\Delta}{2} = (2 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta$$

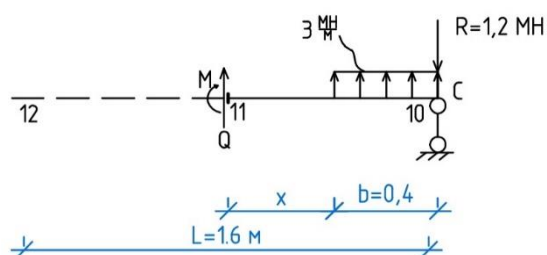
$$q_1 = 3 \frac{MH}{M}$$



$$\sum y = 0$$

$$2R + 2 \cdot 3 \cdot b = 0$$

$$R_C = R_D = -3 \cdot 0,4 = -1,2MH$$



$$0 \leq x \leq 3,2 - 1,6 = 1,6 \text{ м}$$

$$\sum m_k = 0$$

$$M + 1,2 \cdot (0,4 + x) - 3 \cdot 0,4 \cdot (0,2 + x) = 0$$

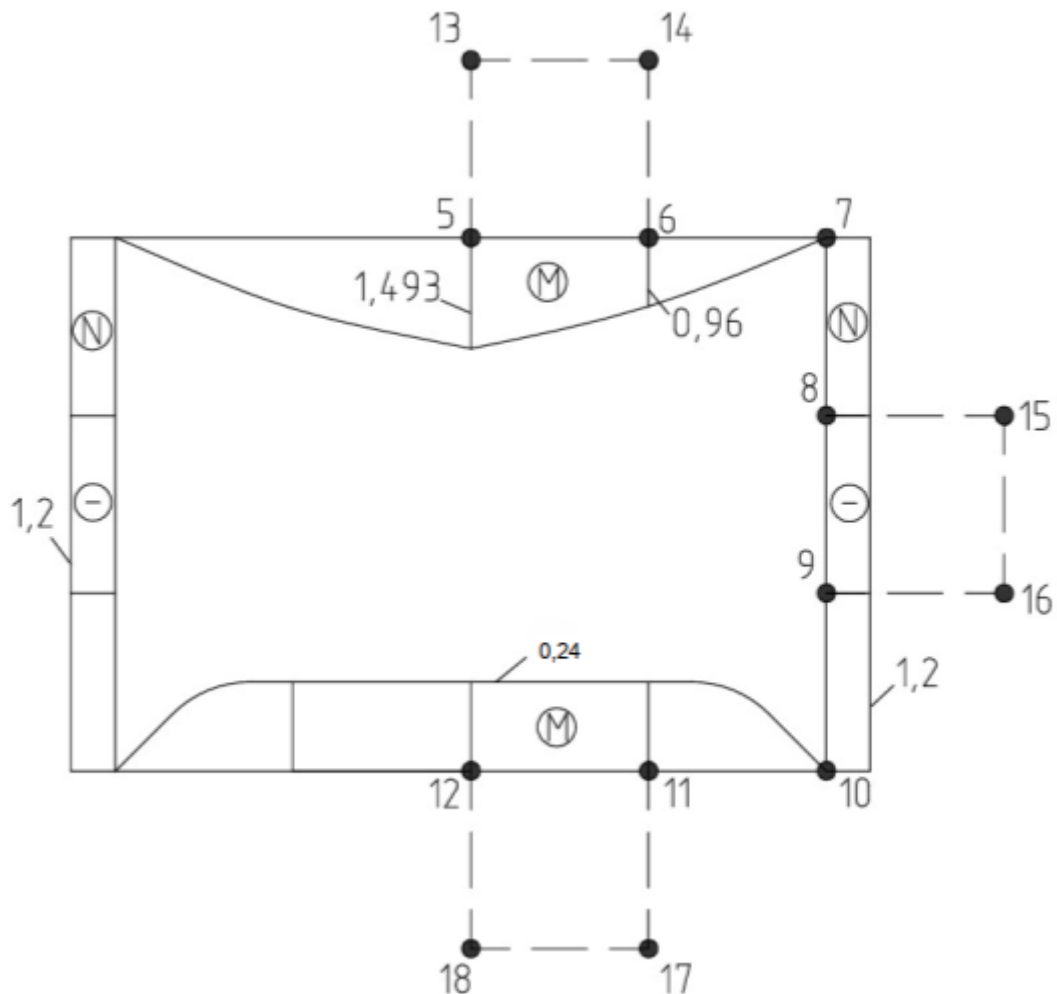
$$M = -1,2 \cdot (0,4 + x) + 3 \cdot 0,4 \cdot (0,2 + x)$$

$$M_{11} = -0,24 \text{ MH} \cdot \text{м}$$

$$M_{12} = -0,24 \text{ MH} \cdot \text{м}$$

$$M_{10} = 0 \text{ MH} \cdot \text{м}$$

$$N_{12} = N_{11} = N_{10} = 0$$



На контуре: если ординаты эпюры M , отложенные со стороны растянутого волокна, направлены во внутрь контура, то $\varphi = +M$.

$N > 0$, если соответствует растяжению.

Имеем, таким образом:

$$\varphi_5 = 1,493; \varphi_6 = 0,96; \varphi_7 = 0; \varphi_8 = 0; \varphi_9 = 0; \varphi_{10} = 0; \varphi_{11} = 0,24;$$

$$\varphi_{12} = 0,24; \varphi_{13} = \varphi_1 + 2 \cdot \Delta \cdot N_5 = \varphi_1; \varphi_{14} = \varphi_2;$$

$$\varphi_{15} = \varphi_2 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{15} = \varphi_2 - 1,92; \varphi_{16} = \varphi_4 - 1,92;$$

$$\varphi_{17} = \varphi_4 + 2 \cdot \Delta \cdot N_{11} = \varphi_4; \varphi_{18} = \varphi_3$$

По симметрии:

$$\varphi_{19} = \varphi_4; \varphi_{20} = \varphi_2; \varphi_{21} = \varphi_8 = 0; \varphi_{22} = \varphi_9 = 0; \varphi_{23} = \varphi_6 = 0,96;$$

$$\varphi_{24} = \varphi_{11} = 0,24;$$

Изм.	Лист	№ докум	Подпись	Дата

3. Подставим значения φ в систему (1):

$$20\varphi_1 - 8 \cdot (\varphi_2 + \varphi_2 + 1,493 + \varphi_3) + 2 \cdot (0,96 + 0,96 + \varphi_4 + \varphi_4) + 0,24 + \varphi_1 + 0 + 0 = 0;$$

$$21\varphi_1 - 16\varphi_2 - 8\varphi_3 + 4\varphi_4 = 7,864;$$

$$20\varphi_2 - 8 \cdot (0,96 + 0 + \varphi_4 + \varphi_1) + 2 \cdot (1,493 + 0 + 0 + \varphi_3) + 0,24 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 - 1,92 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 23\varphi_2 + 2\varphi_3 - 8\varphi_4 = 6,374;$$

$$20\varphi_3 - 8 \cdot (\varphi_1 + \varphi_4 + 0,24 + \varphi_4) + 2 \cdot (\varphi_2 + 0,24 + 0,24 + \varphi_2) + 1,493 + 0 + \varphi_3 + 0 = 0;$$

$$-8\varphi_1 + 4\varphi_2 + 21\varphi_3 - 16\varphi_4 = -0,533;$$

$$20\varphi_4 - 8 \cdot (\varphi_2 + 0 + 0,24 + \varphi_3) + 2 \cdot (\varphi_1 + 0 + 0 + 0,24) + 0,96 + \varphi_4 - 1,92 + \varphi_4 + \varphi_4 = 0.$$

$$2\varphi_1 - 8\varphi_2 - 8\varphi_3 + 23\varphi_4 = 2,4;$$

Окончательно в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 21 & -16 & -8 & 4 \\ -8 & 23 & 2 & -8 \\ -8 & 4 & 21 & -16 \\ 2 & -8 & -8 & 23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,864 \\ 6,374 \\ -0,533 \\ 2,4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Решение системы (2):

$$\varphi_1 = 1,118 \text{ МН};$$

$$\varphi_2 = 0,785 \text{ МН};$$

$$\varphi_3 = 0,632 \text{ МН};$$

$$\varphi_4 = 0,5 \text{ МН};$$

4. Рассмотрим равновесие балки-стенки:

Касательные напряжения на оси симметрии равны нулю.

Найдем напряжение σ_x в т.5, 13, 12.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \boxed{-2} \\ \textcircled{1} \end{array} \cdot \frac{1}{\Delta^2}$$

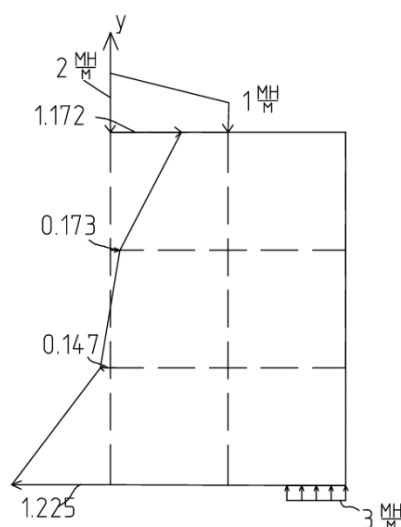
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_{ij}}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_{ij-1} - 2 \cdot \varphi_{ij} + \varphi_{ij+1}}{\Delta^2}$$

$$\sigma_x^{(5)} = \frac{\varphi_{13} - 2 \cdot \varphi_5 + \varphi_1}{\Delta^2} = \frac{1.118 - 2 \cdot 1.493 + 1.118}{0.8^2} = -1.172 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{\varphi_5 - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_3}{\Delta^2} = \frac{1.493 - 2 \cdot 1.118 + 0.632}{0.8^2} = -0.173 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_3 + \varphi_{12}}{\Delta^2} = \frac{1.118 - 2 \cdot 0.632 + 0.24}{0.8^2} = 0.147 \text{ МПа};$$

$$\sigma_x^{(12)} = \frac{\varphi_3 - 2 \cdot \varphi_{12} + \varphi_{18}}{\Delta^2} = \frac{0.632 - 2 \cdot 0.24 + 0.632}{0.8^2} = 1.225 \text{ МПа};$$



$$\Sigma y = 0;$$

$$-(2 + 1) \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0,4 = 0 - \text{верно}$$

$$\Sigma x = 0;$$

$$\frac{1,172 + 0,173}{2} \cdot 0,8 + \frac{0,173 - 0,147}{2} \cdot 0,8$$

$$- \frac{0,147 + 1,225}{2} \cdot 0,8 = 0 - \text{верно}$$

5. Рассмотрим равновесие следующей части балки-стенки:

Касательные напряжения должны равняться нулю.

AD-ось симметрии; BC-свободная сторона

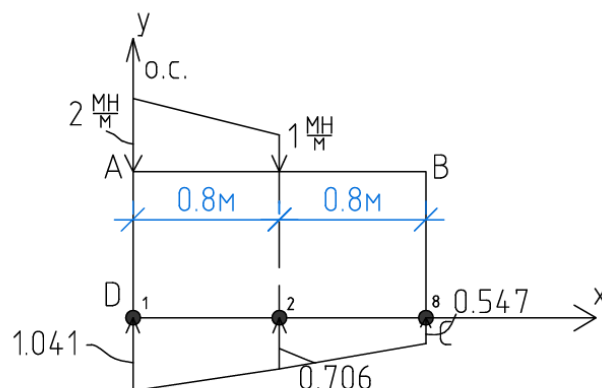
Найдем напряжение σ_y в т.1, 2, 8

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \textcircled{1} - \textcircled{-2} - \textcircled{1} \times \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sigma_y^{(1)} = (\varphi_{20} - 2 \cdot \varphi_1 + \varphi_2) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{0,785 - 2 \cdot 1,118 + 0,785}{0,8^2} = -1,041 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(2)} = (\varphi_1 - 2 \cdot \varphi_2 + \varphi_8) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{1,118 - 2 \cdot 0,785 + 0}{0,8^2} = -0,706 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y^{(8)} = (\varphi_2 - 2 \cdot \varphi_8 + \varphi_{15}) \cdot \frac{1}{\Delta^2} = \frac{0,785 - 2 \cdot 0 + 0,785 - 1,92}{0,8^2} = -0,547 \text{ МПа};$$

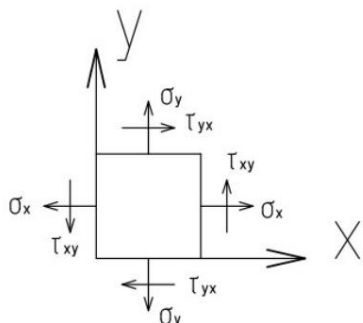


$$\Sigma y = 0$$

$$-(2 + 1) \cdot 0,8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1,041 + 0,706}{2} \cdot 0,8 + \frac{0,706 + 0,547}{2} \cdot 0,8 = 0 - \text{верно}$$

6. Рассмотрим часть 6-7-10-11.

Правило знаков:



В узлах 6 и 11 τ_{xy} должны равняться нулю.

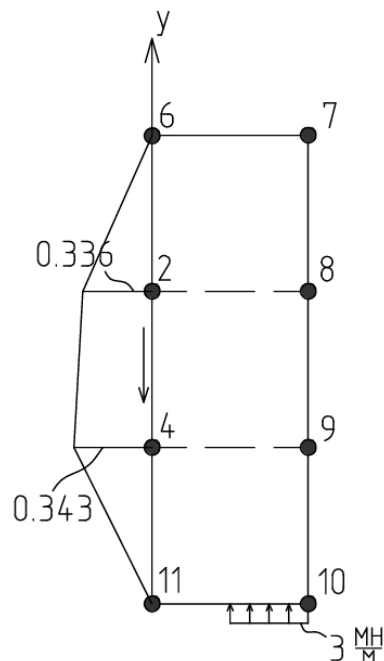
Найдем напряжения τ_{xy} в т.2, 4 :

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \approx$$

$$\times \frac{1}{4\Delta^4}$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = (\varphi_5 - \varphi_7 + \varphi_9 - \varphi_3) \cdot \frac{1}{4\Delta^2} = \frac{1,493 - 0 + 0 - 0,632}{4 \cdot 0,8^2} = 0,336;$$

$$\tau_{xy}^{(4)} = (\varphi_1 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}) \cdot \frac{1}{4\Delta^2} = \frac{1,118 - 0 + 0 - 0,24}{4 \cdot 0,8^2} = 0,343;$$



$$\Sigma y = 0$$

$$3 \cdot 0,4 - \frac{1}{2} \cdot 0,336 \cdot 0,8 - \frac{1}{2} \cdot 0,343 \cdot 0,8$$

$$- \frac{0,336 + 0,343}{2} \cdot 0,8 = 0,656 \neq 0$$

$$h := \frac{L}{40} \quad \text{- шаг сетки} \quad h = 0.06$$

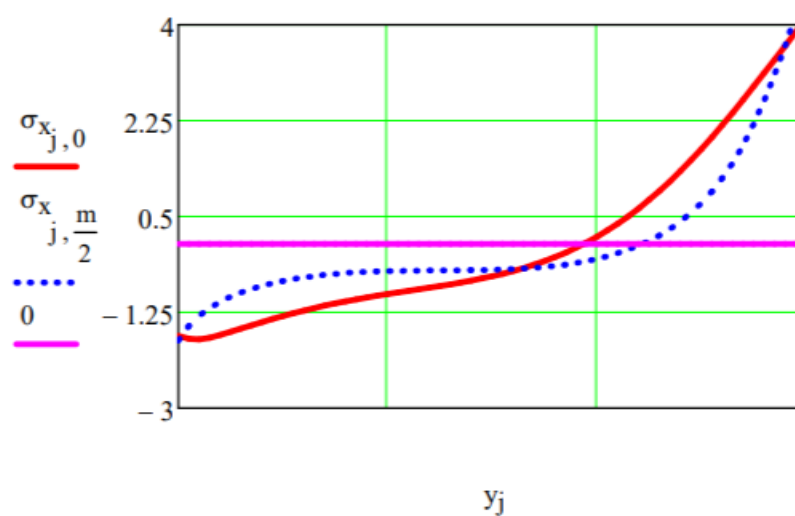
Построим графики напряжений

шаг сетки:

ORIGIN := 0

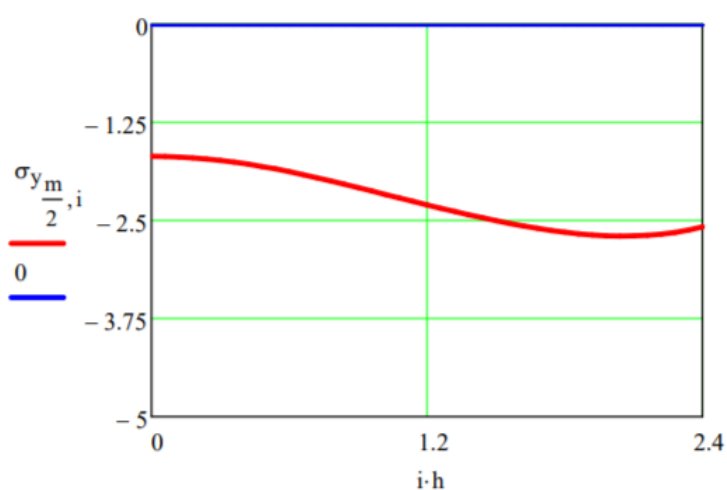
$j := 0..n+1$ $y_j := H - j \cdot h$

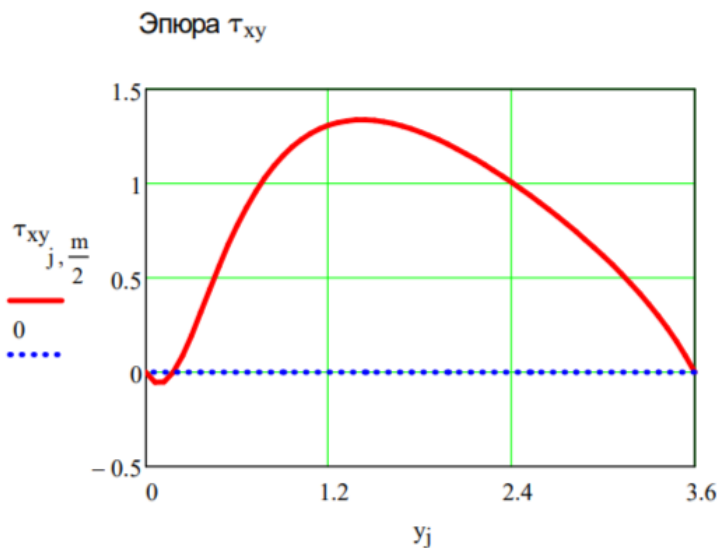
Вертикальное сечение $x = 0$. Эпюра σ_x



$i := 0..m$ $x_i := i \cdot h$

Эпюра σ_y





Проверка равновесия $i := 0$

Вертикальное сечение ($x=0$)

$$\Sigma x = 0 \quad J_{\text{в}} := \frac{h}{2} \cdot \left(\sigma_{x_{0,i}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sigma_{x_{k,i}} + \sigma_{x_{n+1,i}} \right) \quad J = 0$$

$$\Sigma y = 0 \quad \text{Горизонтальное сечение} \quad j := \frac{n+1}{2} \quad j_{\text{в}} := 2$$

$$J_{\text{в}} := \frac{h}{2} \cdot \left(\sigma_{y_{j,0}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_{y_{j,k}} + \sigma_{y_{j,m}} \right) - R \quad J = 0$$

$$\Sigma y = 0 \quad \text{Вертикальное сечение} \quad j_{\text{в}} := \frac{m}{2}$$

$$J_{\text{в}} := \frac{-h}{2} \cdot \left(\tau_{xy_{0,i}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \tau_{xy_{k,i}} + \tau_{xy_{n+1,i}} \right) + \int_{i \cdot h}^L g(s) ds + q l \cdot b \quad J = 0$$